

薄肉円筒殻の座屈について

株式会社 プラント耐震設計システムズ
池 田 雅 俊

1. まえがき

石油精製プラント、化学プラント等の設備（貯槽類や塔類）は、直径に比べて肉厚が小さい薄肉円筒殻や球殻から構成されている。内圧などの単純な引張応力の状態で使用すれば十分な強度を発揮する。しかし地震荷重や負圧などで生じる圧縮あるいはせん断の応力状態では、これらの殻体は座屈して危険な状態となる。過去の地震では、図 1 のような殻体の座屈による多くの被害が発生している。



図 1 薄肉円筒殻の座屈による損傷 (文献6)

今回は、薄肉円筒殻の軸圧縮及び曲げ座屈に関して基本的な考え方を解説する。

2. 座屈とはどのような現象か

圧縮あるいはせん断の応力状態では、変形や外力が限界を超えると安定な平衡状態を保てなくなり、急激に変形が進み崩壊したり、別の形をした平衡状態に移行したりする。このような現象を弾性不安定あるいは慣用的に座屈(buckling)と呼んでいる。

座屈論は古くチモシェンコ (Timoshenko ; 露 1878 - 1972) の教科書に集大成された感があるが、非常に奥深いものがある。

一般的な材料力学の教科書の最初に、梁材の座屈 (Euler 座屈) が紹介されている。座屈の基本的な内容が含まれているので、ここで簡単にレビューする。

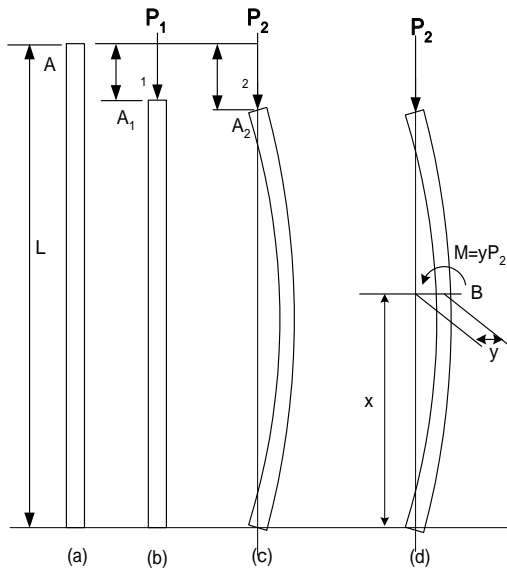


図 2 梁の Euler 座屈

(a)のような梁材に軸方向に力 P が作用すると、 A 点は下に変位するが、その変位は2つの変形の形(変形モード)が考えられる。一つは(b)のように軸圧縮応力により、 A は A_1 に変位し、 L_1 だけ短くなるものである。この場合は梁その物の長さは短くなっているので「伸長型座屈」という。他は(c)のように梁が曲がる(横方向変位することにより A は A_2 に変位するものである。この場合は梁に沿った長さは変わらないので「不伸長型座屈」という。

そこで、(c)の場合の変形の状態をもう少し詳細に見てみる。(d)図にあるように、 x の位置にある B 点で変位 y があるとして、変形の結果生じる曲げモーメントは $M = yP_2$ となる。

したがって、この梁の曲げ剛性を EI とすると、
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P}{EI} y$$
 となり、固有値問

題に帰せられ、解は、 $y = y_{\max} \sin \left\{ \sqrt{\frac{P}{EI}} x + \varphi \right\}$ 、(y_{\max} 及び φ は任意定数)となる。

そこで、境界条件を、両端でピンとすると、 $L \sqrt{\frac{P}{EI}} = n\pi$, $\varphi = 0$, $n = 1, 2, \dots$ 、

すなわち、 $P = EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2$, $n = 1, 2, \dots$ となり、特定の鉛直荷重 P の値に対しての

みこの変形モード(夫々「 n 次のモード」という。)がありうる。

この結果から、 P を徐々に負荷を増していくとして、始めは(b)で変形していくが、 P が

$P = \pi^2 \frac{EI}{L^2}$ になると、急に(c)の不伸長型の変形モードが現れる(「オイラー座屈」という。)

ことになる。この場合、構造物の形状や荷重条件(位置や方向)が理想的な状態だと変形モードの遷移は発生しない。現実にはどうしてもこれらにバラツキがあるために、この変形モード(座屈)が発生することになる。

この座屈の後、変位 y が大きくなるほど曲げモーメントが大きくなるので、変形は進み崩壊に至る。したがって、この梁の座屈モードの場合には、二次以上 ($n > 2$) の変形モードは現れることはない。

3. 薄肉円筒殻の座屈の力学

薄肉円筒殻の軸圧縮による弾性座屈問題は、古い時期から多くの研究が行われてきた。この問題に対する古典的な理論解は次式に示されるもので、既に 1910 年頃には Timoshenko らによって導かれていて、薄肉円筒殻の古典的局部座屈応力 σ_{cr} といわれている。

$$\sigma_{cr} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{t}{r} \cong 0.6E \frac{t}{r} \quad \text{-----} \quad \text{(式 1)}$$

ここで E : ヤング率 ν : ポアソン比 r : 半径 t : 肉厚

(式 1) は、図 3 に示すような円筒の全長方向に波が生じる軸対称の変形モードに対して求めたものである。この場合、軸対称の変形は、円筒の円周長の変化を伴ない、部材の長さの変化を伴う伸長型の座屈である。(軸対象モードに関する実験値によると、係数 0.6 は 0.48 位の値となる。)

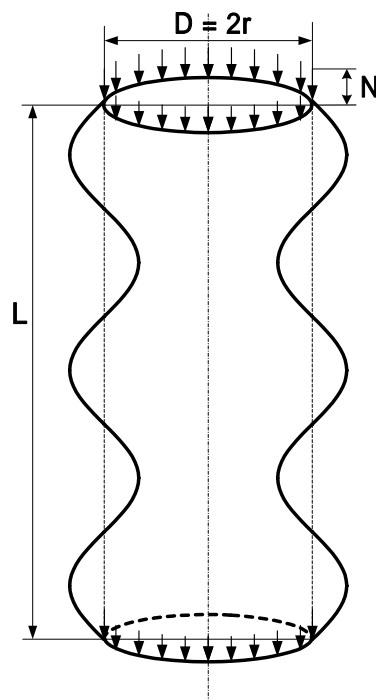


図 3 薄肉円筒殻の軸対称（伸長型）変形モードの座屈

円筒殻にも、梁の座屈で考慮した変形モードと同様に、不伸長型の変形モードがある。それは、軸方向の波（変位の形状）と共に円周方向の波からなる変形モードである。円筒が完全に理想的な形状をしていれば、円筒は軸対称に変形し、古典的な臨界応力まで持ちこたえる。しかし真円度のばらつきや肉厚のばらつきのような初期不整を引金として円周方向に波が発生すると、軸対称の変形を生ずるのに必要であった円周長の伸びは解消（不伸長型変形）され、より小さい荷重の水準で同じ圧縮変位の状態を維持することができるようになり、一気に崩壊に進む。Karman らによる円筒の座屈後の挙動(postbuckling)を、図 4 に示す。円筒に軸圧縮を加えると、円周方向波数 n の大きいモードから小さいモード（細鎖線）に不連続に飛び移りながら太線のように変形が進行することを示している。実験でも明らかに円周方向の波を有する非軸対称の不伸長変形が現れ、薄肉円筒殻の古典的の局部座屈応力（式 1） σ_{cr} の 10～60% の低い荷重にしか実際の円筒は耐えられない。

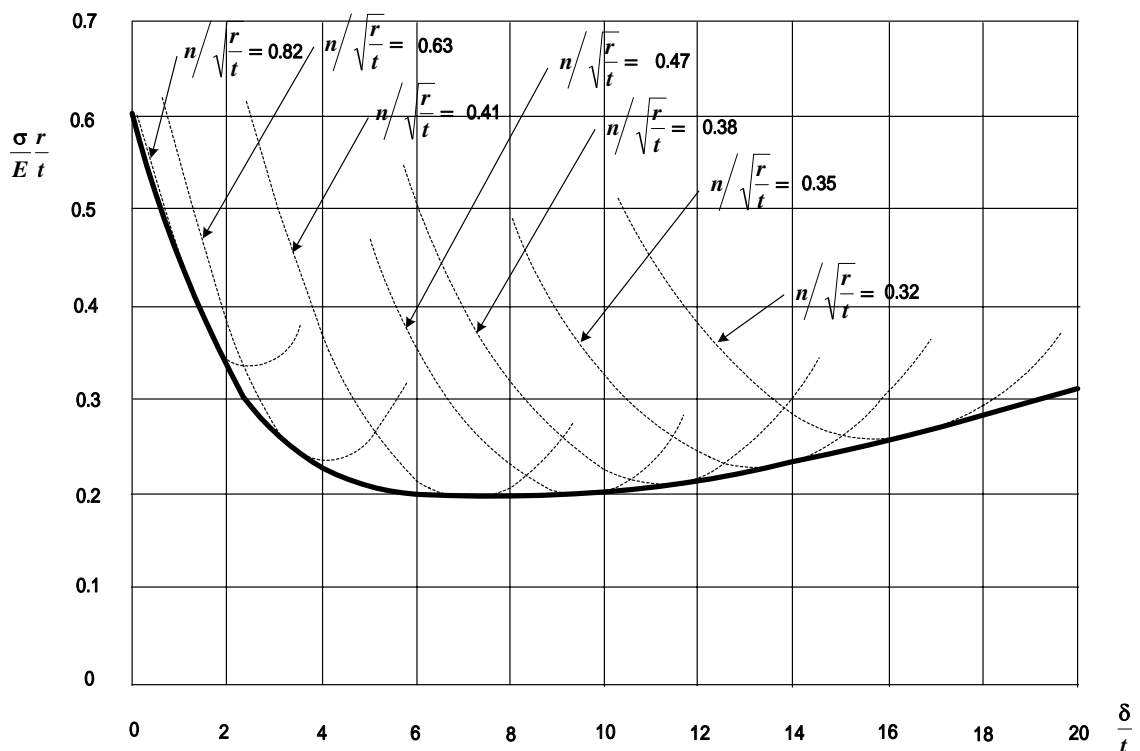


図 4 薄肉円筒殻の座屈変形モード

以上のことより、座屈の一般的な特徴をまとめると、次のようになる。

- (1) 構造・荷重系で 2 つ以上の変形モードが存在する。この場合、オイラー座屈で曲げモーメントを $M = yP_2$ としたように、変形の結果で生じる構造・荷重系を考慮する。一般に材料物性や構造特性を線形化した場合の変形モードに関する座屈を弾性座屈という。また、材料特性の非線形を無視できない荷重条件の場合、非弾

性座屈と称される。

- (2) 荷重・変形の進行と共に異なる変形モードに次々と移動して座屈が進行する。
- (3) 形状や荷重条件のばらつきなどの初期不整のため、異なる変形モードが起動される。
- (4) このような座屈のあと、オイラー座屈では、変形は増大し崩壊に至るが、薄肉円筒殻のような例では、変位が進行するが荷重が極小値を迎えて上昇に転ずることになる。この様子を概念的に図で表すと図 5 の実線のようなになる。
- (5) さらに、数学的にも物理的にも妥当な定式化で得られた上記のように座屈強度の値をうることができるが、実際の構造物では、初期不整の影響により計算式の値よりもかなり低い値で座屈してしまうことがある。そんなとき、設計者向けの指針では理論式を修正した実験公式が一般に用いられる。図 5 において、細鎖線は実際の構造物座屈変形の様子を示す。変形が増大してゆくと理論式に漸近していく。

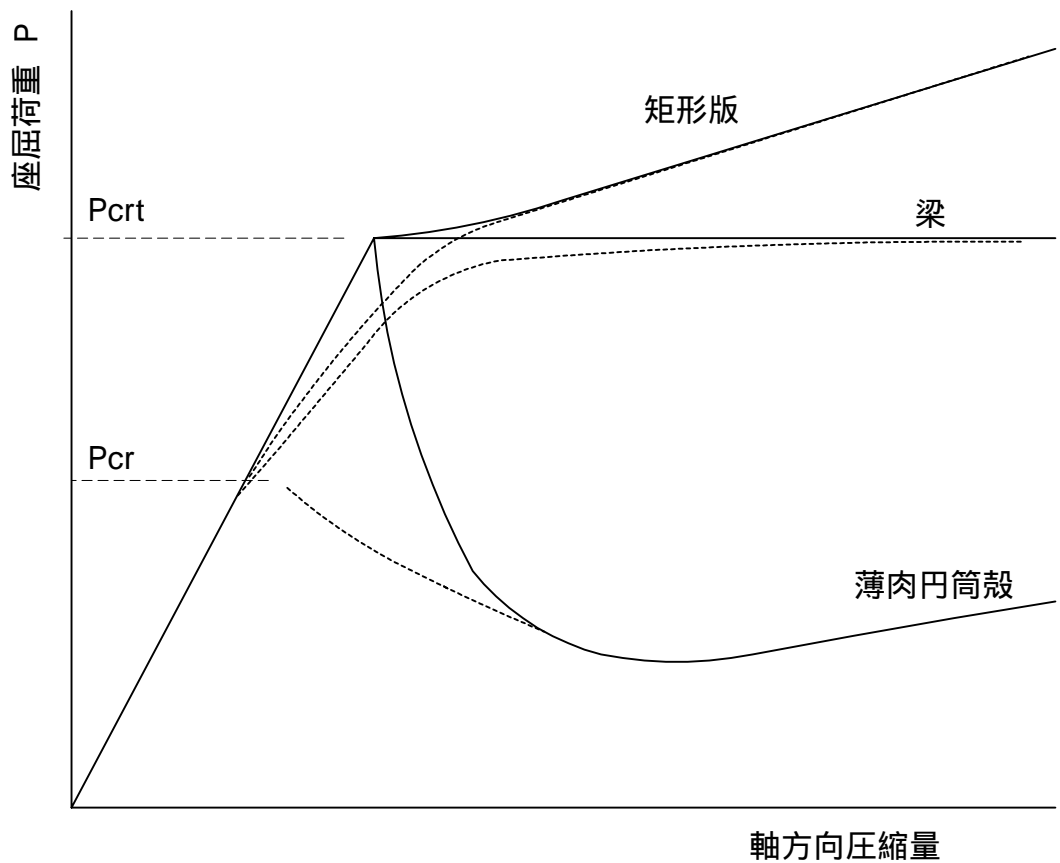


図 5 円筒の座屈後の挙動 (Post Buckling)

4. 薄肉円筒殻の座屈実験式

4.1. 弾性軸圧縮座屈応力式

内圧を受けない円筒殻の弾性軸圧縮応力の実験値の下限を与える実験式が実用されている。代表的な実験式は、NASA 式、Donnel 式及び有限変形理論式がある。一般に円筒殻長さ l が小さくなると座屈応力は高くなるが、安全側に無限長の円筒座屈実験式が設計に使用されている。

(1) NASA Data 文献 1)

NASA は膨大な実験データに基づいて、次の下限式を提案している。

$$\frac{\sigma_k}{E} = 1.2 \left\{ 1 - 0.901 \left(1 - e^{-\frac{1}{16} \sqrt{\frac{D}{2t}}} \right) \right\} \frac{t}{D}$$

適用範囲は、 $\frac{D}{t} \geq 2 \times 2.567 \left(\frac{E}{F} \right)^{0.72}$ である。これは、通常応力値 $\sigma_k = 0.6\text{Sy}$ に相当する。

簡易式として実用上の精度で、 $\frac{\sigma_k}{E} = 5.820 \left(\frac{t}{D} \right)^{1/0.72}$ を使うことができる。

(2) Donnel 座屈式 文献 2)

L.H.Donnel による限界座屈式で塔類の座屈評価に使われている。

$$\frac{\sigma_k}{E} = \frac{\left(0.6 \frac{t}{R} - \frac{R}{10^7 t} \right)}{\left(1 + 0.004 \frac{E}{F} \right)}$$

簡易的に実用上の精度で、 $\frac{\sigma_k}{E} = \frac{1.2}{\left(1 + 0.004 \frac{E}{F} \right)} \frac{t}{D}$ が使われている。

(3) 有限変形理論式 文献 3)

$$\frac{\sigma_k}{E} = 0.388 \frac{t}{D}$$

適用範囲は、(1) と同様に $\sigma_k = 0.6\text{Sy}$ とすると、 $\frac{D}{t} \geq 0.667 \frac{E}{F}$ である。

簡易的にまとめて、 $\frac{\sigma_k}{E} = 0.4 \frac{t}{D}$ が使われている。

これらのデータを比較すると、NASA 式と有限変形理論式はほぼ同等の値を示しているが、Donnel 式は安全側の評価となっている。

4.2. 非弾性座屈

径厚比 D/t が十分大きくて弾性座屈範囲にあるときは、4.1 節にある各式で座屈応力を算出できるが、径厚比がこれより小さい場合は非弾性座屈となる。

弾性座屈は、 $k = 0.6S_y$ の範囲に、基準等では設定されているのが一般的である。非弾性座屈範囲は、実験結果によっているが、降伏点に一致する値から D/t の直線式で与え弾性座屈の値に接続させて、図 6 のようにして弾性座屈、非弾性座屈及び降伏の各領域を通して座屈評価基準としている。

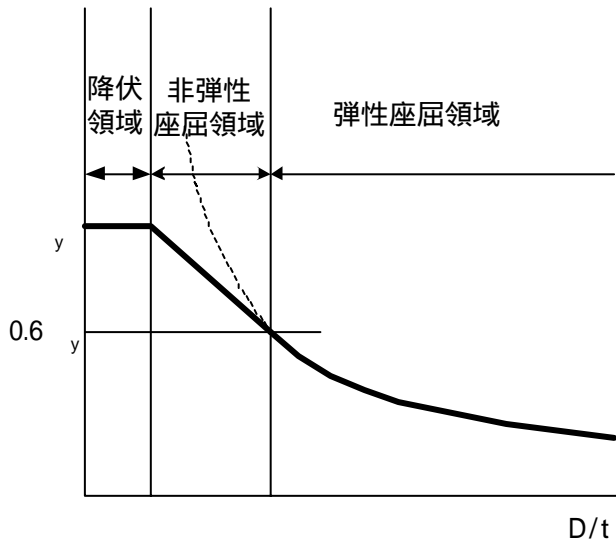


図 6 座屈評価の概念図

4.1 弾性座屈応力実験式に関しては図 7 に示すように座屈評価を行っている。

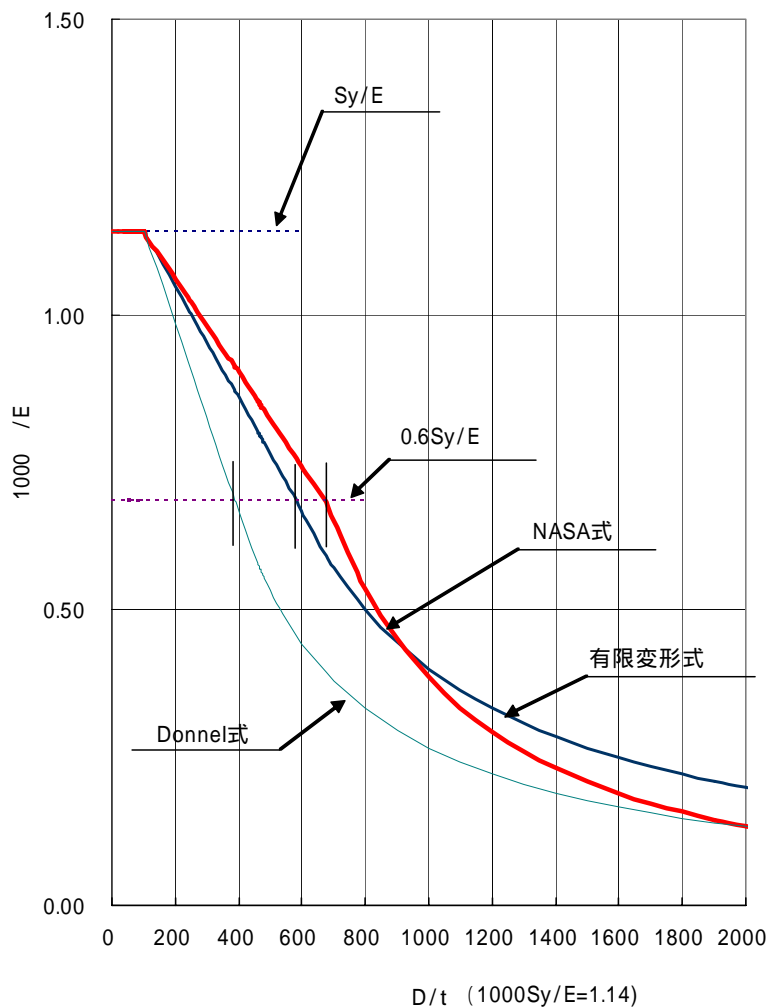


図 7 座屈評価基準 (安全率は含まない)

純軸圧縮に対しては、以上のようにして座屈基準が作成されている。

薄肉円筒殻が曲げを受ける場合の弾性座屈応力は、上記の純軸圧縮受ける場合の座屈値の 1.3~1.5 倍程度の高い値となる。しかしながら、通常は安全側の値として曲げに対しても軸圧縮と同じ値を採用している。なお、曲げ応力に対しても NASA 式が下式のように示されている。

$$\frac{\sigma_k}{E} = 1.2 \left\{ 1 - 0.731 \left(1 - e^{-\frac{1}{16} \sqrt{\frac{D}{2t}}} \right) \right\} \frac{t}{D} \quad \left(\text{簡易式: } \frac{\sigma_k}{E} = 3.792 \left(\frac{t}{D} \right)^{1/0.78} \right)$$

4.3. 内圧を受ける円筒殻の座屈

内圧を受ける円筒殻の座屈の特徴は、内圧が座屈を拘束する効果を持つことと、内圧が殻板降伏を助長し、いわゆる象の足座屈 (Elephant Foot Bulging、EFB) を促進させることである。内圧の効果は、内圧による周方向引張応力 (フープ応力) σ_h と降伏応力 σ_y の比 σ_h / σ_y で代表させることができる。

実験結果によれば軸及び曲げ荷重を受ける内圧円筒殻の座屈応力は、模式的に図 8 によることが示されている。(文献 4)、(文献 5))

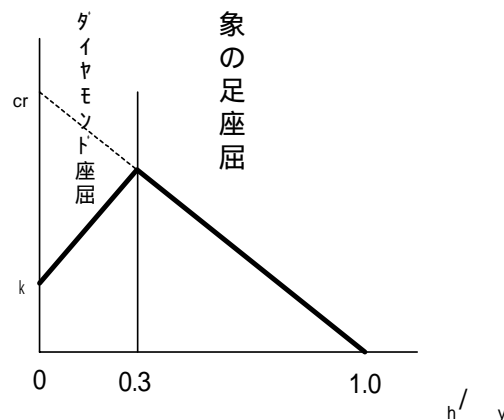


図 8 円筒殻の座屈応力における内圧の影響

ここに、 σ_{cr} : 3. に示す円筒殻の軸対象モードの座屈応力であるが、4.2 で示したように非弾性座屈の補正を行った値とする。

k : 円筒殻の座屈応力で 4.2 で定まる値

$\sigma_h / \sigma_y = 0.3$ を境にして、 $\sigma_h / \sigma_y < 0.3$ でダイヤモンド座屈、 $\sigma_h / \sigma_y > 0.3$ では円筒基部に図 1(a)に示すような象の足座屈 (Elephant Foot Bulging、EFB) を生じる。

4.4. 座屈に対する安全率

各種基準における薄肉円筒殻の座屈評価式及びその安全率を表 1 から表 4 に示す。

表 1 高圧ガス設備等耐震設計基準

評価式		塔類	平底円筒形貯槽	
		Donnel 式	有限変形理論式	NASA 曲げ座屈式 内圧の影響 (側板最下段)
安全率	レベル 1 地震動	$1.2/0.6 = 2.0$	$0.4 \times 3 = 1.2$	
	レベル 2 地震動	$1.2/(1.5 \times 0.6) = 1.33$	$0.4 \times 2.5 = 1.0$	1.0

表 2 JPI スカートを有する塔そう類の強度計算

		塔そう類
評価式		Donnel 式
安全率	長期荷重	$1.2/0.4 = 3.0$
	地震動	$1.2/(1.5 \times 0.4) = 2.0$

表 3 建築学会 容器構造設計指針

		降伏荷重領域	非弾性座屈領域	弾性座屈領域 内圧の影響 NASA 曲げ式
安全率	長期荷重	1.5	直線補間	2.25
	短期荷重 (地震以外)	1.0	直線補間	1.5
	地震	1.0	1.0	1.0

表 4 建築学会 塔状鋼構造設計指針

		降伏荷重	非弾性座屈領域	有限変形理論式
安全率	長期荷重	1.5	直線補間	2.25
	短期荷重	1.0	直線補間	1.5

5. さいごに

塔槽類の耐震設計において支配的な損傷モードである薄肉円筒殻（容器）座屈に関する設計基準の解説を行った。大きな地震を受けた貯槽では、たびたび象の足座屈などが発生しているが、座屈に関する研究も進みかなりな事柄がわかってきている。今回は座屈の基本的な概念を説明するとともに、各種基準で採用している評価式と安全率の考え方などを説明した。基準適用の参考にして頂きたい。

文献 1) NASA SP-8007:Buckling of thin-walled Circular Cylinders,1968

文献 2) Donnel,L.H.:Stability of thin-walled Tubes under Torsion,NACA TN-479,1933

文献 3) 舟山 功：座屈理論、コロナ社, p312

文献 4) 秋山 宏、高橋 誠、野村 聡:内圧と曲げせん断荷重を受ける鋼製円筒殻の座屈

実験、日本建築学会論文報告書、第 400 号,1989

文献 5) 山田大彦、辻 晴彦:軸圧縮力と内圧を受ける鋼製円筒殻の Elephant's Foot Bulge
による大変形特性、日本建築学会大会学術講演梗概集,1988

文献 6) 柴田 碧 編著 : 化学プラントの耐震設計、丸善、1986